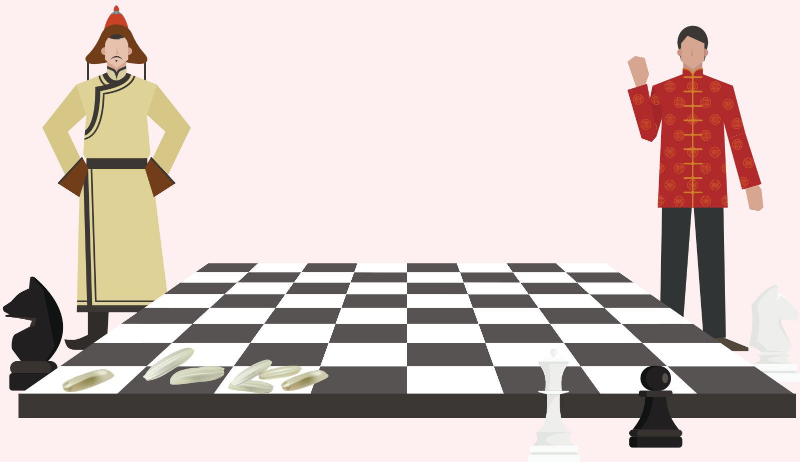
Aufgabenblatt zu

Exponentiellen Technologien

Ein Gespür für exponentielles Wachstum entwickeln

Der Erfinder des Schachspiels

Der indische Kaiser Sheram war so begeistert vom Schachspiel, dass er dessen Erfinder Zeta ein großzügiges Geschenk machen wollte. Er gewährte ihm einen Wunsch und hielt ihn dazu an, nicht zu bescheiden zu sein. Zeta erwiderte: „Gebieter, befiel mir für das erste Feld des Schachbretts 1 Reiskorn auszuhändigen, 2 Körner für das zweite Feld, 4 für das dritte und für jedes weitere Feld doppelt so viele Körner wie für das vorhergehende".



Aufgabe 1:

Ein Schachbrett hat 64 Felder.

❓ Berechne zunächst die Menge an Reiskörnern, die Zeta für die ersten zehn Felder bekommt.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64



Denke daran, dass sich die Anzahl der Körner mit jedem Feld verdoppelt.
Beachte: Zeta erhält die Körner aller Felder, rechne Deine Ergebnisse also zusammen:

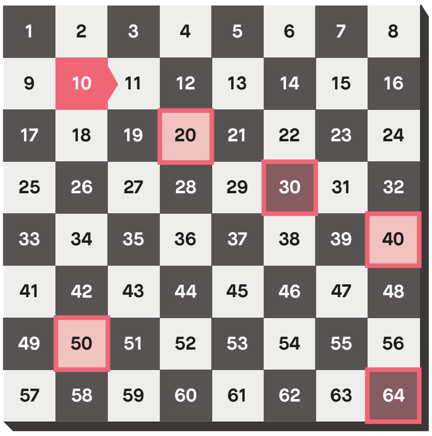
❓ Wie viele Körner schuldet der Kaiser Zeta nach zehn Feldern?

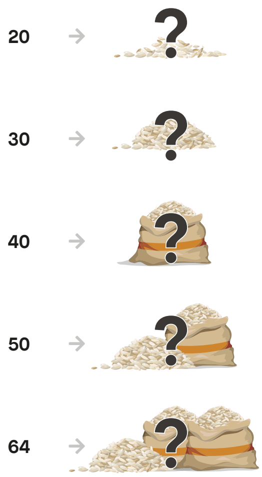
Die Lösung findest Du auf dem entsprechenden Lösungsblatt unter „Zusatzmaterial".

Als die Untertanen die Menge der Reiskörner für die ersten zehn Felder berechnet hatten, war der Kaiser gekränkt, weil er Zetas Wunsch als zu bescheiden empfand.
Doch je weiter die Rechnung voranschritt, desto mehr schlug seine Kränkung in Wut um.

Aufgabe 2:

Berechne, wie viele Reiskörner auf dem 20., 30., 40., 50. und dem 64. Feld liegen müssen.
Du kannst dafür einfach ab Feld 10 weiterrechnen, indem Du die Zahl für das nächste Feld jeweils verdoppelst. So kannst Du Dir auch eine Tabelle für exponentielles Wachstum erstellen, sodass Du diese immer vor Augen hast. Es empfiehlt sich, dafür einen Taschen- oder Online-Rechner zu verwenden, da die Zahlen schnell sehr groß werden.





Falls Du nicht alle Zahlen selbst berechnen willst, sind hier einige Zwischenzahlen als Hilfe:
Feld 15: 16.384;
Feld 25: 8.388.608;
Feld 35: 17.179.869.184;
Feld 45: 17.592.186.044.416;
Feld 60: 576.460.752.303.423.488

Du kannst auch die Formel für die Berechnung einzelner Felder benutzen:

$(a_n) = 1 \cdot 2^{n-1}$

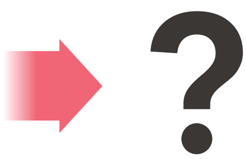
(a_n) ist dabei das entsprechende Feld, z.B. (a_{11}) für Feld 11, (a_{23}) für Feld 23, usw.
Zum Beispiel für Feld 11: $(a_{11}) = 1 \cdot 2^{11-1} \rightarrow (a_{11}) = 1.024$

Die Lösung dieser Aufgabe findest Du auf dem Lösungsblatt.

Als die Untertanen Kaiser Sheram sagten, wie viel Reis er Zeta schuldete, war dieser so entsetzt und wütend, dass er ihm den Kopf abschlagen ließ.

Fleißaufgabe:





Rechne die Anzahl der Reiskörner aller 64 Felder zusammen, um zu erfahren, wie viel Zeta vom Kaiser bekommen müsste.

Hierfür lohnt es sich, eine Liste mir allen Schritten von Feld 1 bis Feld 64 zu erstellen. Dann kannst Du vermutlich auch nachvollziehen, warum der Kaiser das Gefühl hatte, ausgetrickst worden zu sein.

Die Lösung und weitere interessante Infos findest Du auf dem Lösungsblatt.

Lösungsblatt zu

Exponentiellen Technologien

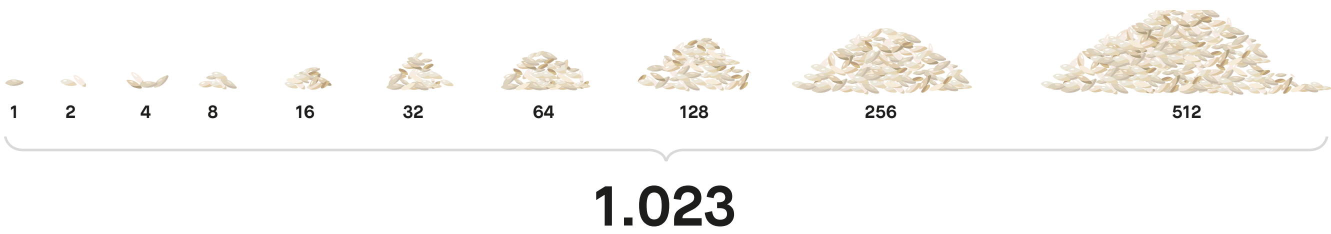
Ein Gespür für exponentielles Wachstum entwickeln

Der Erfinder des Schachspiels

Lösung Aufgabe 1:

Feld	Anzahl Reiskörner	Feld	Anzahl Reiskörner
1	1	**6**	32
2	2	**7**	64
3	4	**8**	128
4	8	**9**	256
5	16	**10**	512

Insgesamt: 1+2+4+8+16+32+64+128+256+512 = **1.023**



Lösung: Kaiser Sharam schuldet Zeta nach den ersten 10 Feldern 1.023 Körner Reis.

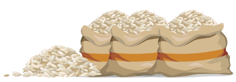
Lösung Aufgabe 2:

Feld	Anzahl Reiskörner	Feld	Anzahl Reiskörner
11	1.024	38	137.438.953.472
12	2.048	39	274.877.906.944
13	4.096	**40**	**549.755.813.888**
14	8.192	41	1.099.511.627.776 (über eine Billion)
15	16.384	42	2.199.023.255.552
16	32.768	43	4.398.046.511.104
17	65.536	44	8.796.093.022.208
18	131.072	45	17.592.186.044.416
19	262.144	46	35.184.372.088.832
20	**524.288**	47	70.368.744.177.664
21	1.048.576 (über eine Million)	48	140.737.488.355.328
22	2.097.152	49	281.474.976.710.656
23	4.194.304	**50**	**562.949.953.421.312**
24	8.388.608	51	1.125.899.906.842.624 (über eine Billiarde)
25	16.777.216	52	2.251.799.813.685.248
26	33.554.432	53	4.503.599.627.370.496
27	67.108.864	54	9.007.199.254.740.992
28	134.217.728	55	18.014.398.509.481.984
29	268,435.456	56	36.028.797.018.963.968
30	**536.870.912**	57	72.057.594.037.927.936
31	1.073.741.824 (über eine Milliarde)	58	144.115.188.075.855.872
32	2.147.483.648	59	288.230.376.151.711.744
33	4.294.967.296	60	576.460.752.303.423.488
34	8.589.934.592	61	1.152.921.504.606.846.976 (über eine Trillion)
35	17.179.869.184	62	2.305.843.009.213.693.952
36	34.359.738.368	63	4.611.686.018.427.387.904
37	68.719.476.736	**64**	**9.223.372.036.854.775.808**

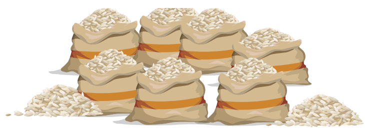
Feld 20: 524.288 Körner
Feld 30: 536.870.912 Körner
Feld 40: 549.755.813.888 Körner
Feld 50: 562.949.953.421.312 Körner
Feld 64: 9.223.372.036.854.775.808 Körner



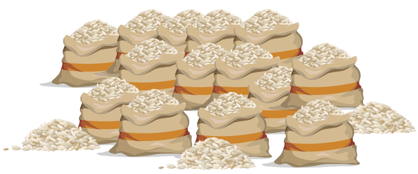
524.288



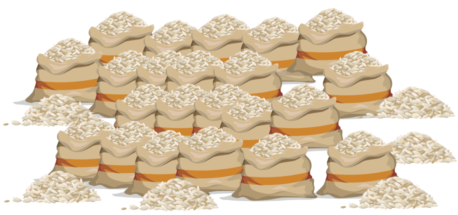
536.870.912



549.755.813.888



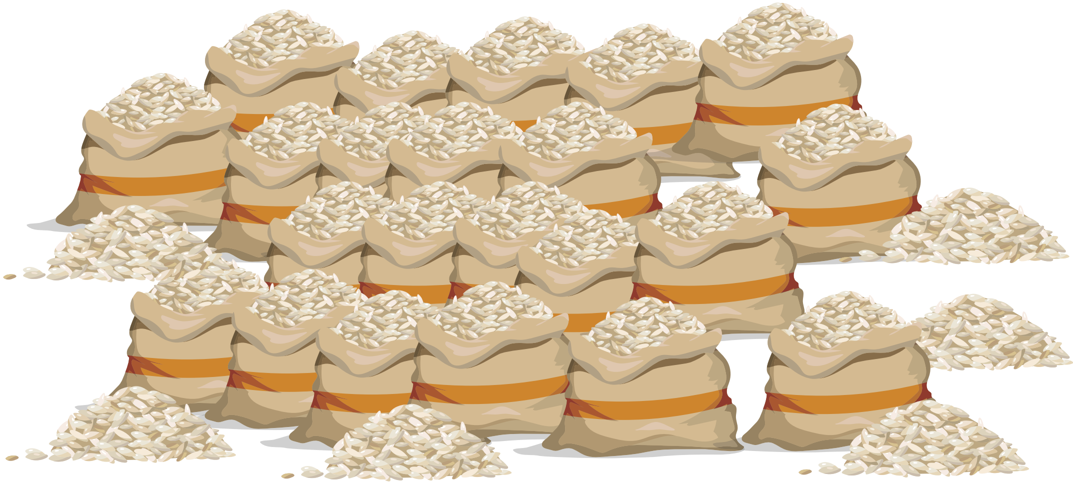
562.949.953.421.312



9.223.372.036.854.775.808

Fleißaufgabe:

Feld 1 + Feld 2 + Feld 3 + Feld 4 + Feld 5 + ... + Feld 64 = ...
Lösung: 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 9.223.372.036.854.775.808 = **18.446.744.039.484.029.952 (ca. 18,5 Trillionen Reiskörner)**



18.446.744.039.484.029.952
(ca. 18,5 Trillionen Reiskörner)

Zusätzliche Infos:

Unter dieser Anzahl an Reiskörnern kann man sich natürlich nur schwer etwas vorstellen.
Für größere Anschaulichkeit kann sie daher noch in Tonnen umgerechnet werden.
100 Reiskörner wiegen etwa 3 Gramm, ein Korn wiegt also etwa 0,03 Gramm.
Dies multipliziert man nun mit der Gesamtanzahl an Reiskörnern. Der Einfachheit halber wird das Ergebnis abgerundet:
18.446.744.039.484.029.952 · 0,03 gr. ≈ 540.000.000.000.000.000 gr. ≈ 540.000.000.000.000 kg ≈ 540.000.000.000 Tonnen
Der gesamte Reis, den Zeta vom Kaiser bekommen müsste, entspricht also etwa einem Gewicht von 540 Milliarden Tonnen.

2006 wurden weltweit etwa 618,4 Millionen Tonnen Reis geerntet, der Einfachheit halber wird von dieser Zahl ausgegangen.
Teilt man nun die Menge Reis des Schachbretts durch die jährlich produzierte Menge weltweit (540.000.000.000 : 618.400.000 ≈ 873,22), findet man heraus, dass Sheram dem Erfinder des Schachspiels den Ertrag von ca. 873 Jahren Reisernte hätte aushändigen müssen.
Zeta war in seiner Bitte, dem Wunsch des Kaisers entsprechend, also alles andere als bescheiden.